



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA - 17.02.2018 - CLASA A VI - A
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL 1

Fie numerele naturale a, b, c astfel încât $15a - 14b + 126c = 2016$. Arătați că $a \cdot b$ este divizibil cu 42.

Rezolvare si barem:

$$\left. \begin{aligned} 15a &= 2016 + 14b - 126c = 7(288 + 2b - 18c) \\ (15, 7) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7|a \dots\dots\dots 2p$$

$$\left. \begin{aligned} 15a &= 2016 + 14b - 126c = 2(1008 + 7b - 63c) \\ (15, 2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2|a \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{aligned} 7|a \text{ și } 2|a \\ (7, 2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 14|a \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{aligned} 14b &= 15a + 126c - 2016 = 3(5a + 42c - 672) \\ (14, 3) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3|b \dots\dots\dots 2p$$

$$14|a \text{ și } 3|b \Rightarrow 42|ab \dots\dots\dots 1p$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA - 17.02.2018 - CLASA A VI - A
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 2

Se consideră suma $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2018} + \frac{1}{2017 \cdot 2019} + \frac{1}{2018 \cdot 2020}$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right)$, oricare ar fi n și p numere naturale nenule.

b) Demonstrați că $\frac{5}{8} < S < \frac{3}{4}$.

Rezolvare și barem:

a)2p

b) Aplicând a) pentru $p = 2$ avem

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} \right) \quad 2p$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} \right) < \frac{3}{4} \quad \dots 1p$$

$$\frac{5}{8} < S \Leftrightarrow \frac{5}{8} < \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} \right) < \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} < \frac{1}{4} \text{ (A)} \quad \dots 2p$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA - 17.02.2018 - CLASA A VI - A
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 3

Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, M_3, \dots, M_p$ astfel încât M_1 este mijlocul segmentului (AB) , M_2 este mijlocul segmentului (AM_1) , M_3 este mijlocul segmentului (AM_2) , \dots , M_p este mijlocul segmentului (AM_{p-1}) , $p \in \mathbb{N}^*$. Lungimea segmentului (AB) este de n cm, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

a) Dacă $n = 2048$ cm și $(AM_p) = 1$ cm, aflați valoarea lui p .

b) Dacă lungimea segmentului $(M_7 M_2)$ este egală cu 31 cm aflați ce valoare are n .

Rezolvare si barem:

a) $AM_1 = \frac{AB}{2} = \frac{n}{2}$, $AM_2 = \frac{AM_1}{2} = \frac{n}{2^2}$, \dots , $AM_p = \frac{AM_{p-1}}{2} = \frac{n}{2^p}$ 2p

$\frac{n}{2^p} = 1 \Leftrightarrow 2^p = 2048 \Leftrightarrow p = 11$ 1p

b) $M_7 M_2 = AM_2 - AM_7 = \frac{n}{2^2} - \frac{n}{2^7} = \frac{n(2^5 - 1)}{2^7}$ 2p

$\frac{n(2^5 - 1)}{2^7} = 31 \Leftrightarrow n = 2^7 \Leftrightarrow n = 128$2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA - 17.02.2018 - CLASA A VI - A
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 4

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar unghiurile $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt adiacente complementare, astfel încât $m(\sphericalangle AOD) = 152^\circ$.

a) Aflați măsura unghiului BOC .

b) Dacă în interiorul unghiului $\sphericalangle AOD$ se construiesc 16 semidrepte distincte cu originea în O astfel încât cele 17 unghiuri formate au măsurile exprimate în grade prin numere naturale, arătați că cel puțin două dintre acestea sunt congruente.

Rezolvare și barem:

a) $m(\sphericalangle COD) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOD) = 28^\circ$ 1p

$m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ - m(\sphericalangle COD) = 62^\circ$ 2p

b) Presupunem că măsurile celor 17 unghiuri sunt diferite1p

Suma măsurilor $S = m(\sphericalangle AOD) = 152^\circ$ 1p

Dar $S \geq 1^\circ + 2^\circ + \dots + 17^\circ = 153^\circ$, fals2p